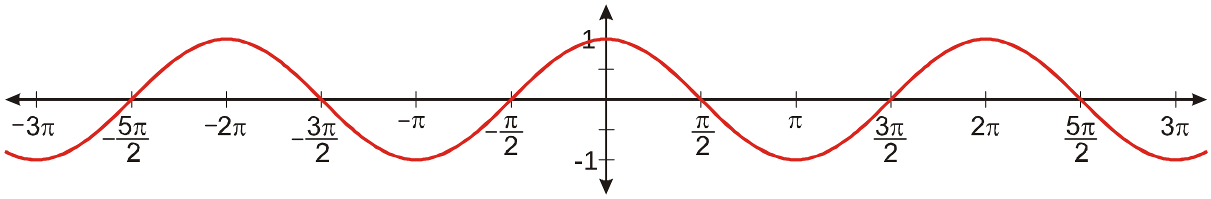
4.2.17 Cyklometrické funkce

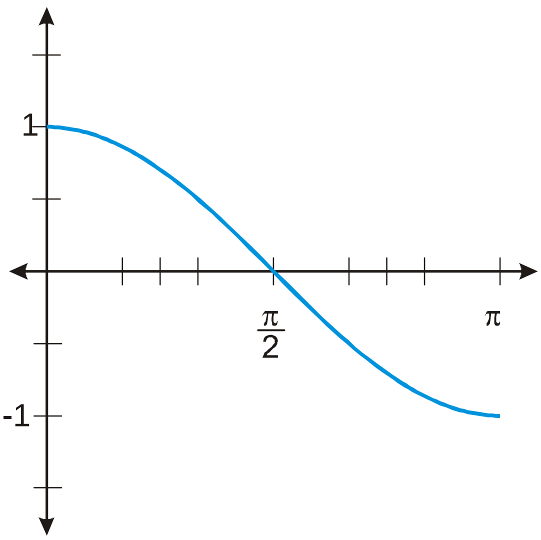
Předpoklady: 4216

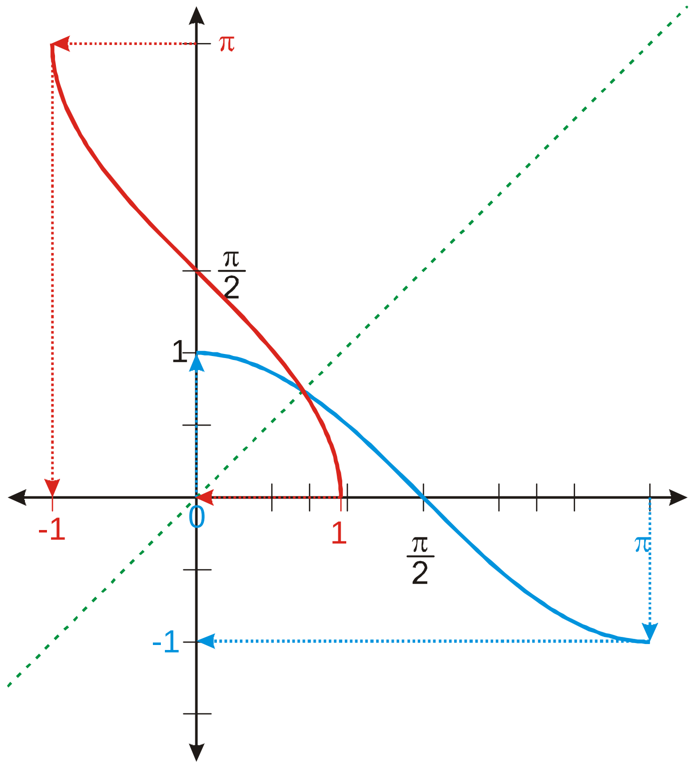
Cyklometrické funkce: funkce inverzní k funkcím goniometrickým $\Rightarrow$ z minulé hodiny známe první cyklometrickou funkci $y = \arcsin x$ (inverzní k funkci $y = \sin x$).

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = \cos x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \cos x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.



Omezíme definiční obor pouze na $D(f) = \langle 0;\pi \rangle$.





Funkce inverzní k funkci $y = \cos x$ se nazývá $y = \arccos x$ **(arkus kosinus)**.

Př. 2: Srovnej v tabulce vlastnosti funkcí $y = \cos x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \arccos x$.

$y = \cos x$	$y = \arccos x$
$D(f) = \langle 0;\pi \rangle$	$D(f) = \langle -1;1 \rangle$
$H(f) = \langle -1;1 \rangle$	$H(f) = \langle 0;\pi \rangle$
funkce je klesající	funkce je klesající

Př. 3: Urči: a) $\arccos 1$ b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $\arccos 0$

d) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\arccos(-1)$ f) $\arccos(-2)$.

a) $\arccos 1 = 0$ (protože $\cos 0 = 1$)

b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$ (protože $\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)

c) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ (protože $\cos\frac{\pi}{2} = 0$)

d) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ (protože $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

e) $\arccos(-1) = \pi$ (protože $\cos\pi = -1$)

f) $\arccos(-2) = \textit{neexistuje}$ (protože funkce $y = \cos x$ nemá nikdy hodnotu -2)

Př. 4: Urči pomocí kalkulačky ve stupních s přesností na minuty přibližné hodnoty:

a) $\arccos 0,2$ b) $\arccos(-0,7)$ c) $\arccos\frac{2}{3}$ d) $\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

a) $\arccos 0,2 \doteq 78°28'$ b) $\arccos(-0,7) \doteq 134°26'$

c) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right) \doteq 48°11'$ d) $\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \doteq 121°34'$

Př. 5: Urči v obloukové míře: a) $y = \arccos\frac{1}{3}$ b) $\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Hledané hodnoty nejdříve odhadni, poté je urči s pomocí kalkulačky s přesností na setiny.

Funkce arccos je klesající, platí $\arccos 0 = \frac{\pi}{2} \doteq 1,57 \Rightarrow$ hledaná hodnota bude větší než $\frac{\pi}{3} \doteq 1,05$ a menší než $\frac{\pi}{2} \doteq 1,57$. Kalkulačka: $\arccos\frac{1}{3} \doteq 1,23\,\text{rad}$.

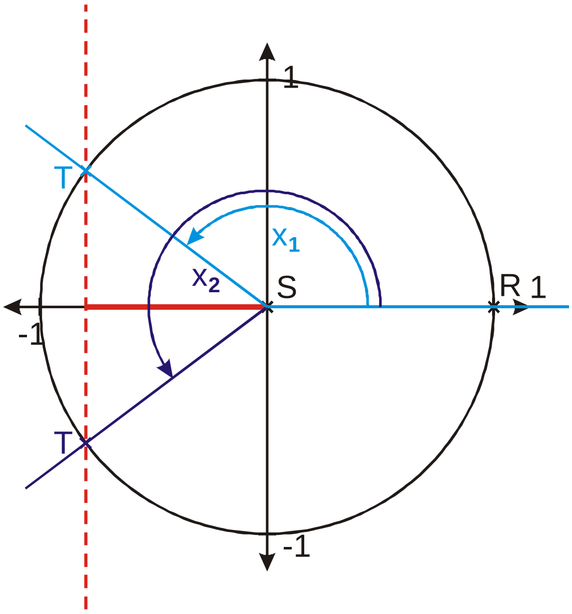
$-\frac{\pi}{4} \doteq -0,79$. Funkce arccos je klesající, platí $\arccos -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}\pi \doteq 2,36 \Rightarrow$ hledaná hodnota bude větší než $\frac{3}{4}\pi \doteq 2,36$ a menší než $\frac{5}{6}\pi \doteq 2,62$. Kalkulačka: $\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \doteq 2,47\,\text{rad}$.

Př. 6: Najdi všechna *x*, pro která platí $\cos x = -0,8$.

-0,8 není tabulková hodnota funkce $y = \cos x \Rightarrow$ nemůžeme přesně určit hodnotu úhlu *x*.
Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\arccos(-0,8) \doteq 143°8'$.

Přesně musíme zapisovat požadovaný úhel, pro který platí $\cos x = -0,8$, pomocí funkce arccos jako $\arccos(-0,8)$.

Platí tedy $x_1 = \arccos(-0,8)$. Z jednotkové kružnice zjistíme, zda existují další taková čísla:



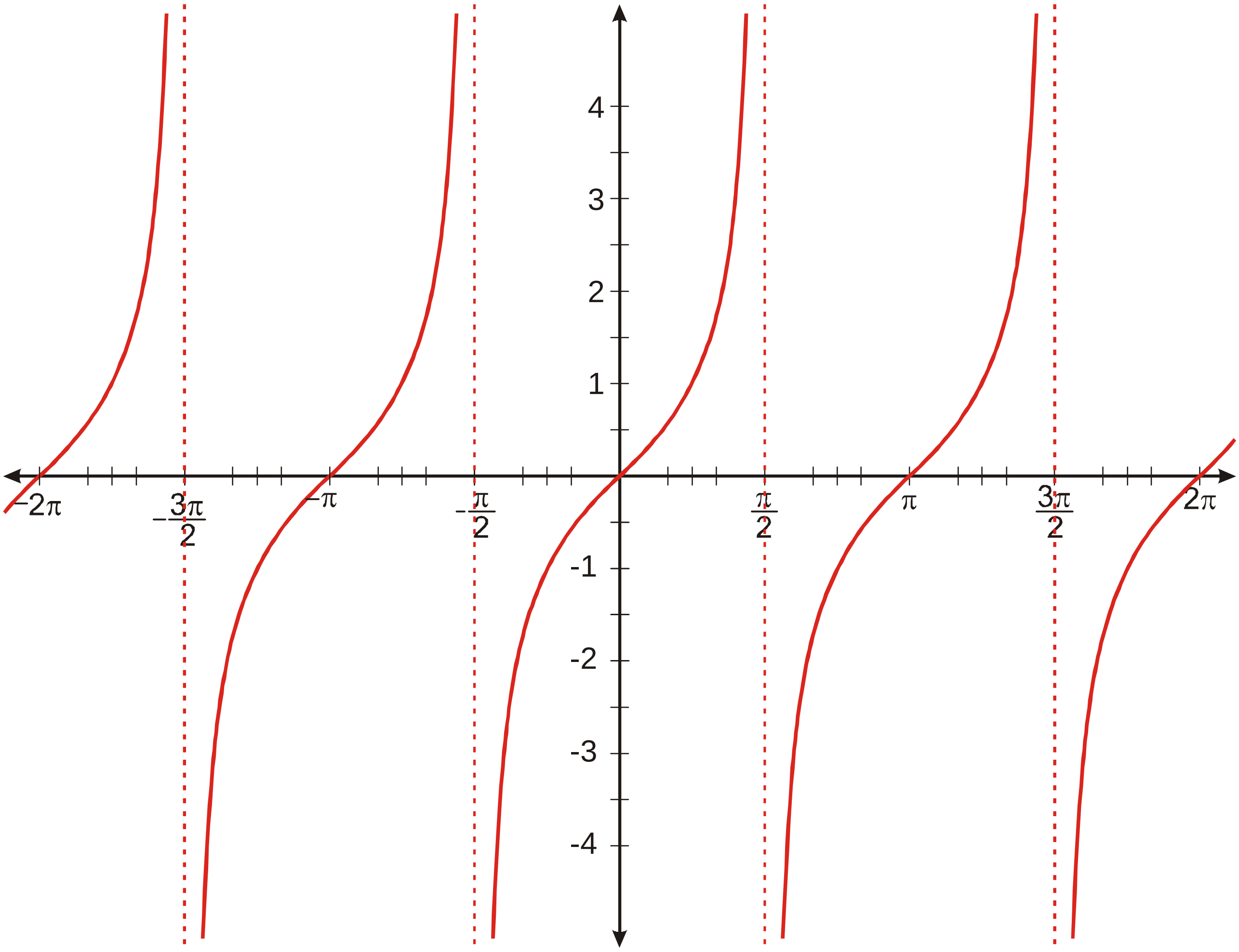
Z obrázku je vidět, že v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě hodnoty x, pro které platí $\cos x = -0,8$:

$x_1 = \arccos(-0,8)$ a $x_2 = 2\pi - \arccos(-0,8)$.

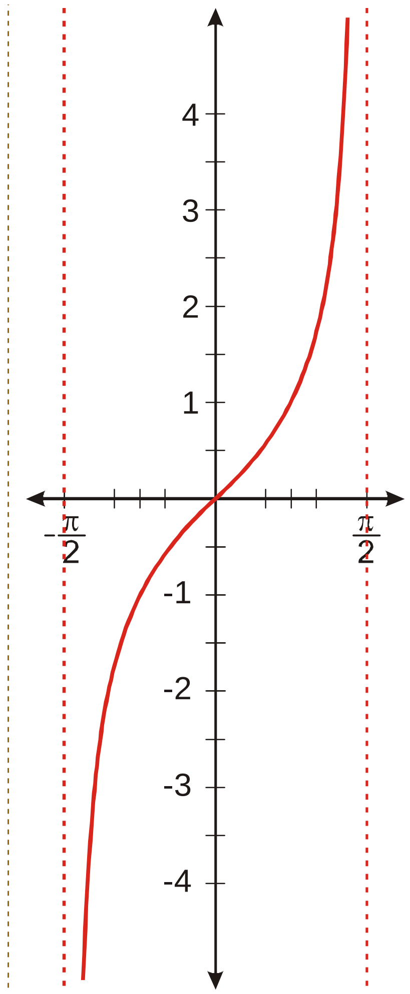
Funkce $y = \cos x$ je periodická s nejmenší periodou $2\pi \Rightarrow \cos x = -0,8$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k \in Z} = \{\arccos(-0,8) + k \cdot 2\pi; 2\pi - \arccos(-0,8) + k \cdot 2\pi\}$.

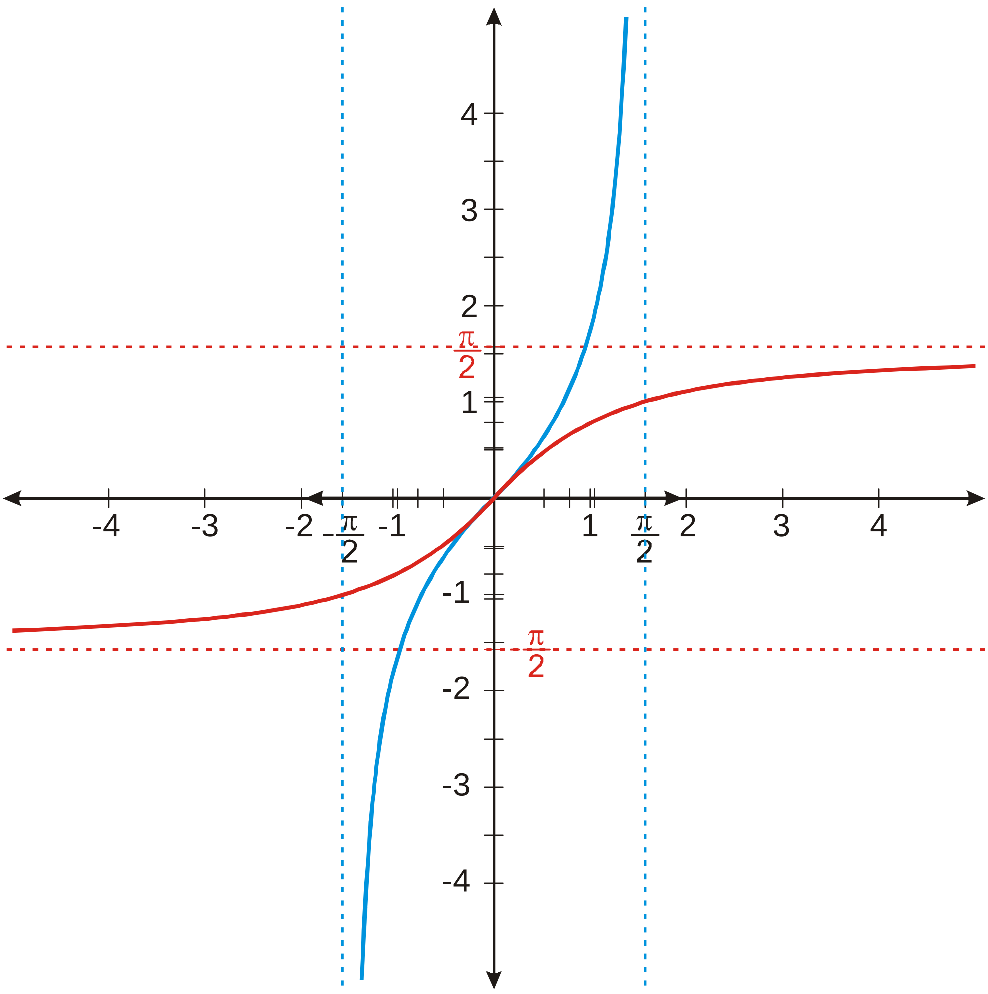
Podobně budeme postupovat i u dalších goniometrických funkcí:

Př. 7: Nakresli graf funkce $y = \operatorname{tg} x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.



Omezíme definiční obor pouze na $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.


4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$



Funkce inverzní k funkci $y = \mathrm{tg}\, x$ se nazývá $y = \mathrm{arctg}\, x$ **(arkus tangens)**.

Př. 8: Srovnej v tabulce vlastnosti funkcí $y = \mathrm{tg}\, x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \mathrm{arctg}\, x$.

$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{arctg}\, x$
$D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$D(f) = R$
$H(f) = R$	$H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
funkce je rostoucí	funkce je rostoucí
funkce je lichá	funkce je lichá

Př. 9: Urči: a) $\operatorname{arctg} 1$ b) $\operatorname{arctg} -\sqrt{3}$ c) $\operatorname{arctg} 0$

d) $\operatorname{arctg} -1$ e) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

a) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (protože $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$)

b) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ (protože $\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$)

c) $\operatorname{arctg} 0 = 0$ (protože $\operatorname{tg} 0 = 0$)

d) $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ (protože $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$)

e) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ (protože $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

Př. 10: Urči pomocí kalkulačky přibližně ve stupňové míře:
a) $\operatorname{arctg} -10$ b) $\operatorname{arctg} 0,4$ c) $\operatorname{arctg} 2\pi$ d) $\operatorname{arctg} 520$.

a) $\operatorname{arctg}(-10) \doteq -84°17'$ b) $\operatorname{arctg} 0,4 \doteq 21°48'$

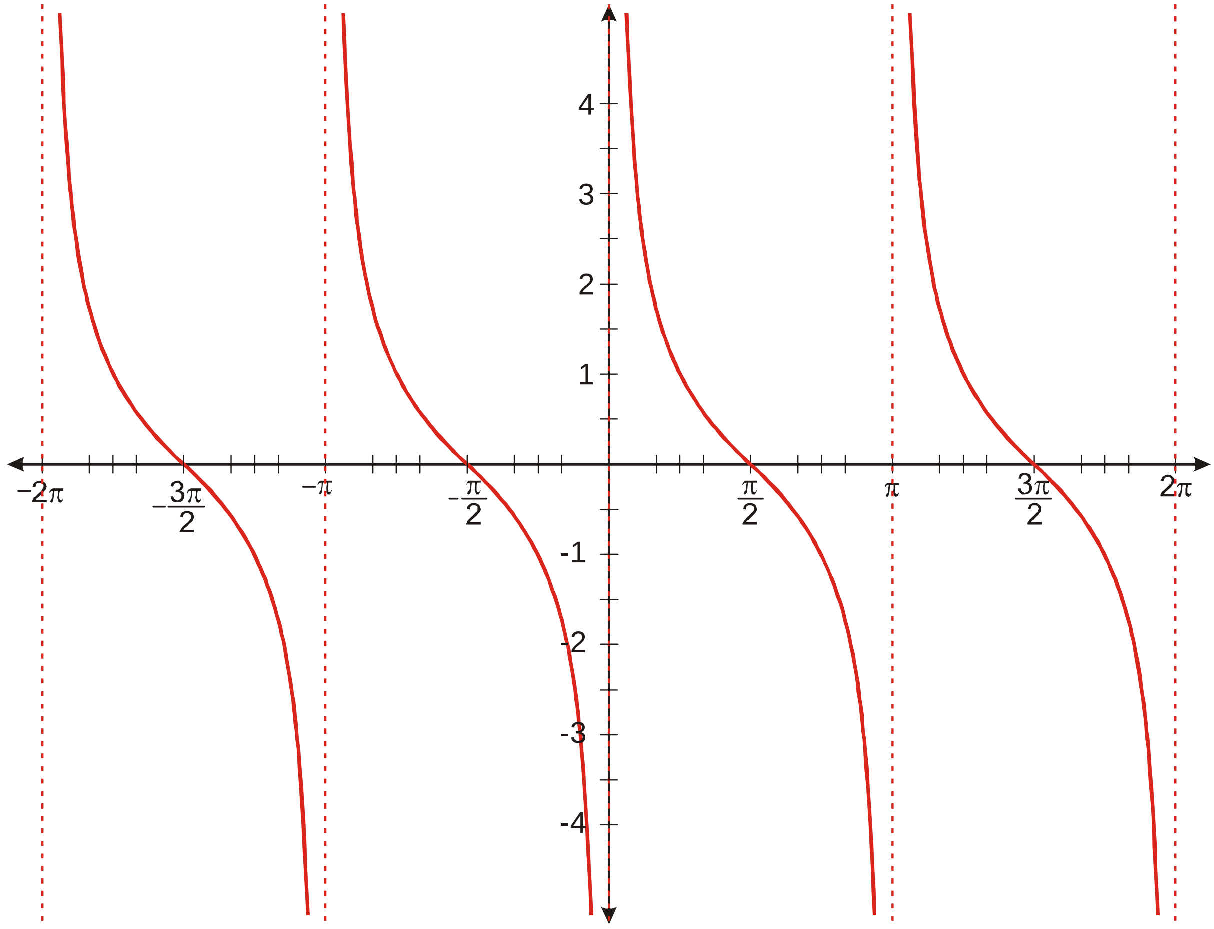
c) $\operatorname{arctg} 2\pi \doteq 80°57'$ d) $\operatorname{arctg} 520 \doteq 89°53'$

Př. 11: Najdi všechna *x*, pro která platí $\operatorname{tg} x = 2$.

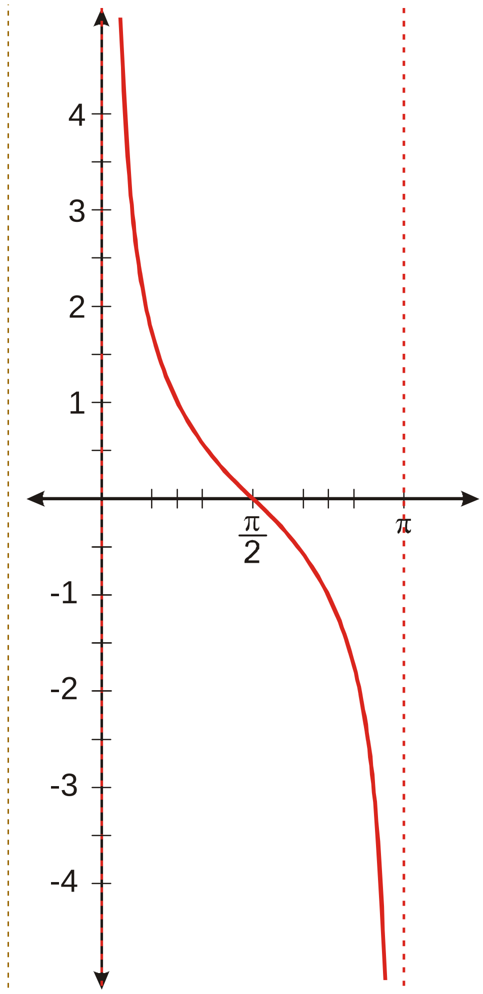
2 nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $y = \operatorname{tg} x$ $\Rightarrow$ nemůžeme přesně určit hodnotu úhlu *x*.
Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\operatorname{arctg} 2 \doteq 63°26'$.
Přesně $x_1 = \operatorname{arctg} 2$.
Funkce $y = \operatorname{tg} x$ je v rámci své jedné periody (například v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) prostá (viz. graf nahoře) $\Rightarrow$ nemusíme hledat další hodnoty *x*, protože všechny další už se vyskytují v jiných periodách.
$\operatorname{tg} x = 2$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k \in Z} = \left\{\operatorname{arctg} 2 + k \cdot \pi\right\}$.

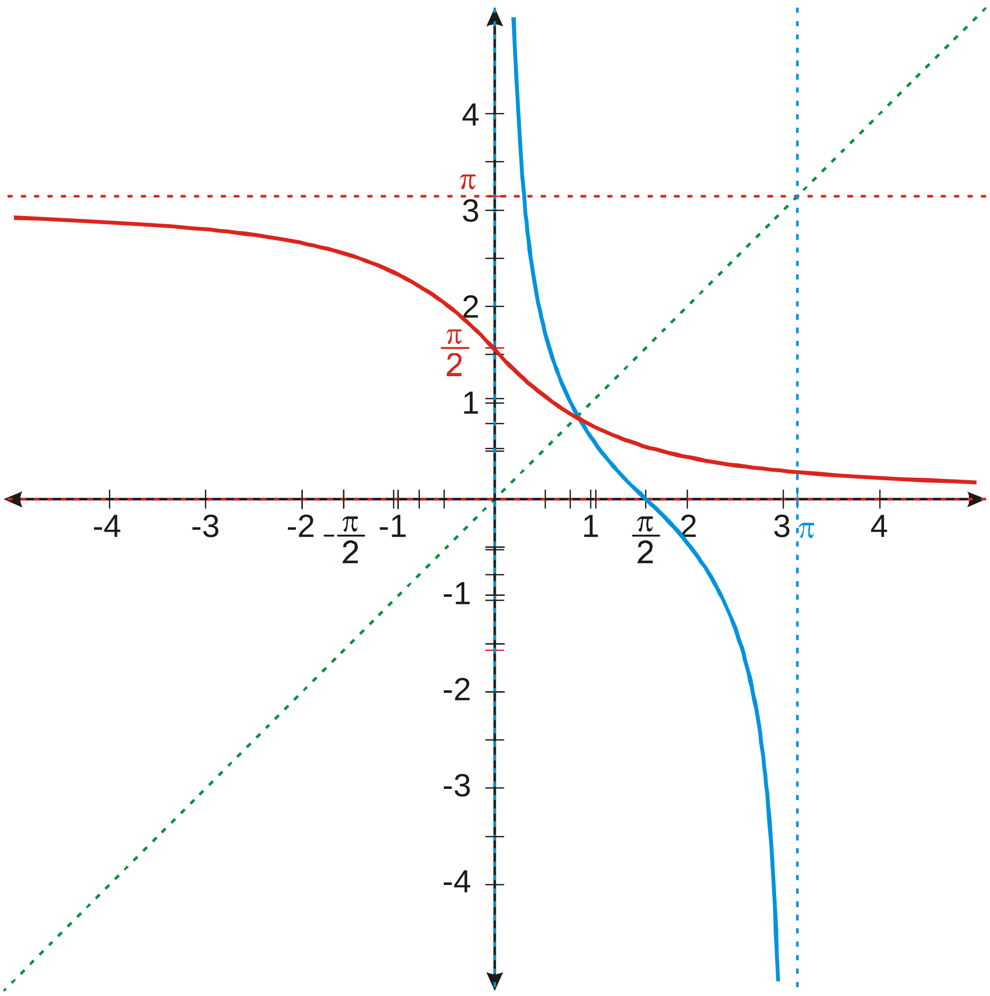
Poslední goniometrickou funkcí je funkce $y = \operatorname{cotg} x$.

Př. 12: Nakresli graf funkce $y = \operatorname{cotg} x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \operatorname{cotg} x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.



Omezíme definiční obor pouze na $D(f) = (0;\pi)$.


4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
π
2
π



Funkce inverzní k funkci $y = \operatorname{cotg} x$ se nazývá $y = \operatorname{arccotg} x$ (arkus kotangens).

Př. 13: Srovnej v tabulce vlastnosti funkcí $y = \operatorname{cotg} x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \operatorname{arccotg} x$.

$y = \operatorname{cotg} x$	$y = \operatorname{arccotg} x$
$D(f) = (0;\pi)$	$D(f) = R$
$H(f) = R$	$H(f) = (0;\pi)$
funkce je klesající	funkce je klesající

Př. 14: Urči: a) $\operatorname{arccotg} -1$ b) $\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ c) $\operatorname{arccotg} 0$ d) $\operatorname{arccotg}\sqrt{3}$.

a) $\operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$ (protože $\operatorname{cotg}\frac{3}{4}\pi = -1$)

b) $\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi$ (protože $\operatorname{cotg}\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$)

c) $\operatorname{arccotg}(0)=\frac{\pi}{2}$ (protože $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}=0$)

d) $\operatorname{arccotg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$ (protože $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$)

Př. 15: Urči pomocí kalkulačky přibližně ve stupňové míře:
a) $\operatorname{arcotg} 0{,}1$ b) $\operatorname{arcotg} 5$ c) $\operatorname{arcotg} -2$.

Problém: Většina kalkulaček neosahuje tlačítko funkce $\operatorname{arccotg} x$ ($\cot^{-1}$), kalkulačky mají pouze tlačítko funkce $\operatorname{arctg} x$ ($\tan^{-1}$).

$\Rightarrow$ použijeme vzorec $\operatorname{tg} x=(\operatorname{cotg} x)^{-1}$, z hodnoty $\operatorname{cotg} x$ určíme hodnotu $\operatorname{tg} x$ a z ní vypočteme úhel *x*.

a) $\operatorname{arccotg} 0{,}1 \doteq 84°17'$ ($\operatorname{cotg} x=0{,}1 \Rightarrow \operatorname{tg} x=(0{,}1)^{-1}=10$, $\operatorname{arctg} 10 \doteq 84°17'$)

b) $\operatorname{arccotg} 5 \doteq 11°19'$ ($\operatorname{cotg} x=5 \Rightarrow \operatorname{tg} x=(5)^{-1}=0{,}2$, $\operatorname{arctg} 0{,}2 \doteq 11°19'$)

c) $\operatorname{arccotg}(-2) \doteq 153°26'$ ($\operatorname{cotg} x=-2 \Rightarrow \operatorname{tg} x=(-2)^{-1}=-0{,}5$, $\operatorname{arctg}(-0{,}5) \doteq 26°34'$, funkce $y=\operatorname{arccotg} x$ má hodnoty pouze v intervalu $(0;\pi)$ $\Rightarrow$ k hodnotě $\operatorname{arctg}(-0{,}5) \doteq -26°34'$ přičtem 180° $\Rightarrow$ $\operatorname{arccotg}(-2) \doteq 153°26'$)

Př. 16: Najdi všechna *x*, pro která platí $\operatorname{cotg} x=-3$. Výsledek urči přibližně pomocí kalkulačky i přesně pomocí cyklometrické funkce.

Protože -3 nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $y=\operatorname{cotg} x$, nemůžeme přesně určit hodnotu úhlu *x*.
Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\operatorname{arccotg}(-3) \doteq 161°34'$.
(podrobněji u kalkulaček, které mají pouze funkci tangens:
$\operatorname{cotg} x=-3 \Rightarrow \operatorname{tg} x=(-3)^{-1}=-\frac{1}{3}$, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) \doteq -18°26'$, funkce $y=\operatorname{arccotg} x$ má hodnoty pouze v intervalu $(0;\pi)$ $\Rightarrow$ k hodnotě $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) \doteq -18°26'$ přičteme 180° $\Rightarrow$ $\operatorname{arccotg}(-3) \doteq 161°34'$)

Přesně musíme zapisovat požadovaný úhel, pro který platí $\operatorname{cotg} x=-3$ pomocí funkce arcoctg jako $\operatorname{arccotg}(-3)$.

Platí tedy $x_1=\operatorname{arctg}(-3)$.

Funkce $y=\operatorname{cotg} x$ je v rámci své jedné periody (například v intervalu $(0;\pi)$) prostá (viz. graf nahoře) $\Rightarrow$ nemusíme hledat další hodnoty *x*, protože všechny další už se vyskytují v jiných periodách.
$\operatorname{cotg} x=-3$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k\in Z}=\{\operatorname{arctg}(-3)+k\cdot\pi\}$.

Př. 17: Petáková:
strana 44/cvičení 43, 44 hodnoty arccos, arctg, arccot

Shrnutí: